Midtoets Lineaire Algebra 1, 15 december 2011

De toets bestaat uit 6 vraagstukkken. U krijgt 180 minuten om deze vraagstukken te beantwoorden. De puntenwaardering kunt u vinden aan het einde van de vraagstukken. Each question is also translated into English. You may answer in Dutch or English.

1. **(Nederlands)** Gegeven is de lineaire vergelijking $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ met

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & k \\ k+2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Hierin is $k \in \mathbb{R}$.

a. Voor welke waarden van k heeft de vergelijking een unieke oplossing?

b. Voor welke waarden van k is de vergelijking strijdig?

c. Voor welke waarden van k heeft de vergelijking oneindig veel oplossingen?

1. **(English)** Consider the linear equation $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ met

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & k \\ k+2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix},$$

where $k \in \mathbb{R}$.

a. For which values of k does the equation have a unique solution?

b. For which values of k is the equation inconsistent?

c. For which values of k does the equation have infinitely many solutions?

2. **(Nederlands)** Stel dat A, B en C $m \times n$ matrices zijn.

a. Wat betekent de uitspraak dat A rij-equivalent is met B?

b. Toon aan: als A rij-equivalent is met B dan is B rij-equivalent met A.

c. Toon aan: als A rij-equivalent is met B en B is rij-equivalent met C, dan is A rij-equivalent met C.

d. Toon aan: als $m = n$ en A en B zijn niet-singulier, dan zijn A en B rij-equivalent.

2. **(English)** Suppose that A, B and C are $m \times n$ matrices.

a. What does the statement mean that A is row equivalent to B?

b. Show that: if A is row equivalent to B then B is row equivalent to A.

c. Show that: if A is row equivalent to B and B is row equivalent to C, then A is row equivalent to C.

d. Show that: if $m = n$ and A and B are non-singular then A and B are row equivalent.

3. (Nederlands) a. Stel dat A en B inverteerbare matrices zijn, en X een matrix zodat $AXB = A + B$. Bepaal X.

   b. Stel A en B vierkante matrices zodanig dat $AB = BA$. Toon aan dat $(AB)^\top = A^\top B^\top$.

   c. Toon aan: als A inverteerbaar is, dan is ook $A^\top$ inverteerbaar, en $(A^\top)^{-1} = (A^{-1})^\top$.

3. (English) a. Suppose that A and B are invertible matrices, and X is a matrix such that $AXB = A + B$. Determine X.

   b. Suppose A and B are quadratic matrices which satisfy $AB = BA$. Show that $(AB)^\top = A^\top B^\top$.

   c. Show that: if A is invertible then $A^\top$ is also invertible and $(A^\top)^{-1} = (A^{-1})^\top$.

4. (Nederlands) Bepaal de inverse van de matrix A gegeven door

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. (English) Determine the inverse of the matrix A given by

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. (Nederlands) Bekijk voor elke $x \in \mathbb{R}$ de 3×3 matrix

$$A = \begin{pmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & -1 \\ -1 & -1 & x \end{pmatrix}.$$

   a. Bepaal $\det(A)$ als functie van x.

   b. Bepaal alle waarden van x waarvoor A singulier is.

5. (English) For each $x \in \mathbb{R}$ consider the 3×3 matrix

$$A = \begin{pmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & -1 \\ -1 & -1 & x \end{pmatrix}.$$

   a. Determine $\det(A)$ as a function of x.

   b. Determine the values of x for which A is singular.

6. (Nederlands) Voor een $n \times n$ matrix $A = (a_{ij})$ is het *spoor* van A (notatie $\operatorname{tr} A$) gedefinieerd als

$$\operatorname{tr} A = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}$$

(d.w.z. het spoor van A is de som van de elementen op de diagonaal van A). Zij M de verzameling van $n \times n$ matrices waarvoor het spoor gelijk aan nul is. Laat zien dat M met de gewone optelling van matrices en de gewone vermenigvuldiging van matrices met scalairen een vectorruimte vormt.

6. (English) For an $n \times n$ matrix $A = (a_{ij})$, the *trace* of A (notation $\operatorname{tr} A$) is defined as

$$\operatorname{tr} A = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}$$

(i.e. the trace of A is the sum over the diagonal elements of A). Let M denote the set of $n \times n$ matrices for which the trace is equal to zero. Show that M together with the usual addition of matrices and the usual multiplication of matrices by scalars forms a vector space.

Puntenwaardering:

Vraagstuk 1: 15
Vraagstuk 2: 20
Vraagstuk 3: 15
Vraagstuk 4: 10
Vraagstuk 5: 10
Vraagstuk 6: 20
U krijgt 10 punten gratis.
Het eindcijfer wordt bepaald door het totale aantal punten door 10 te delen.